D E'LHOSPITAL

ΜΟΡΦΕΣ

1) $"\frac{0}{0}"$.

$$α.\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-συνx}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-συνx)'}{(\ln(x+1))'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+ημx}{\frac{1}{x+1}}=\frac{e^0+ημ0}{1}=1$$

$$β.\ \lim_{x\to 1}\frac{2x^2\ln x-x^2+1}{xe^x-2e^x+e}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x^2\ln x-x^2+1)'}{(xe^x-2e^x+e)'}=\lim_{x\to 1}\frac{4x\ln x+2x-2x}{e^x+xe^x-2e^x}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x\ln x}{xe^x-e^x}=\lim_{x\to 1}\frac{(4x\ln x)'}{(xe^x-e^x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{4\ln x+4}{xe^x}=\frac{4}{e}.$$

2) $"\frac{\infty}{\infty}"$.

$$α.\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(x-1)}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x(x-1))'}{(x^3)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(x-1)+e^x}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{3x^2}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(xe^x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3}=+\infty$$

$$β.\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{e^{1/x}}\overset{DLH}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{e^{1/x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to 0^+}\left[-\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}\right]=0.$$

(Ειδική Περίπτωση Με $"\frac{\infty}{\infty}","\frac{0}{0}"$)

$$α.\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{2x}-1}{e^x}}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\overset{DLH}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x}{2e^x}=1$$

$$β.\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x+συνx}{x-συνx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1+\frac{συνx}{x})}{x(1-\frac{συνx}{x})}\ \{1\}$$

Όμως $\left|\frac{συνx}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}\leftrightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{συνx}{x}\le\frac{1}{|x|}$ *(Φραγμένη επί μηδενική)*

Και λόγω ότι:

$\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{|x|}=0$ ΚΑΙ $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|}=0$ άρα από **Κ.Π.** $\lim_{x\to+\infty}\frac{συνx}{x}=0$

Συνεπώς, στη σχέση {1} έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x})}{(1-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x})} = \frac{1}{1} = 1\,.$$

3)"0· ∞".

$$α.\ \lim_{x\to0^+} x\ln x = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{DLH}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} (-x) = o$$

$$β.\ \lim_{x\to-\infty} x^2 \cdot e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\frac{1}{e^x}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \overset{DLH}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \overset{DLH}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0.$$

4)"0^0".

- $\lim_{x\to0^+} x^{\eta\mu x} = \lim_{x\to0^+} e^{\ln x^{\eta\mu x}}$ {1}

$$\lim_{x\to0^+} \ln x^{\eta\mu x} = \lim_{x\to0^+} \eta\mu x \cdot \ln x$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\eta\mu x}} \overset{DLH}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}} = \lim_{x\to0^+} -\frac{\eta\mu^2 x}{x\sigma\upsilon\nu x}$$

$$= \lim_{x\to0^+} -\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -1 \cdot 0 = 0$$

Άρα,στην {1} έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+} x^{\eta\mu x} = \lim_{x\to0^+} e^{\ln x\cdot\eta\mu x} = e^0 = 1$$

5)"∞^∞".

$$\lim_{x\to+\infty} (x+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\cdot\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)} \{2\}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\ln\left(x+\frac{1}{x}\right) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$

Άρα, $\lim_{x\to+\infty} e^{x\cdot\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)} = +\infty.$

6)"∞^0".

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(x^2+x)}$ {3}

Όπου, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(x^2+x) \overset{DLH}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(x^2+x)} = e^0 = 1$. Και η μορφή 1^∞ λύνεται όπως οι (4),(5),(6).

7)"$(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$".

[Προτιμάμε να βγάζουμε κοινό παράγοντα το x]

α. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-lnx) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{lnx}{x}\right)$ {4}

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x} \overset{DLH}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$

Άρα, στη σχέση {4} έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{lnx}{x}\right) = +\infty$

[Προτιμάμε να βγάζουμε κοινό παράγοντα το e^x]

β. $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x^2) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right)$ {5}

όπου,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} \overset{DLH}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} \overset{DLH}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0$

Άρα , η σχέση {5} είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right) = +\infty\cdot(1-0) = +\infty$.

γ. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)} \overset{DLH}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\frac{1}{x+1}}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}} =$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{(x+1)\ln(x+1)+x}{x+1}} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{(x+1)\ln(x+1)+x} \overset{DLH}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\ln(x+1)+2} = \frac{1}{2}$

δ. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(e^x+x)-x] = \lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(e^x+x)-lne^x] =$
$\lim\limits_{x\to+\infty} ln\left[\frac{e^x+x}{e^x}\right]$ {6}

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x+x}{e^x}\right) \overset{DLH}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x} \overset{DLH}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1$ Άρα η {6}=ln1=0.